№4-дәріс.

Тақырыбы: Тригонометриялық және иррационал функцияларды интегралдау.

Тригонометриялық функцияларды интегралдау.

Бұл бөлімде біз

$$\int R(\sin x, \cos x)dx ,$$

түріндегі интегралды табу әдістерін қарастырамыз, мұндағы $R(u,v)$- u,v - ға қатысты рационал функция.

Мұндай түрдегі интегралдар айнымалыны универсал ауыстыру көмегімен

$$tg\frac{x}{2} = t ,$$

рационал функцияларды интегралдауға әкелеміз. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \left| \text{бөлшектің алымы мен бөлімін } \cos^2\frac{x}{2} \text{-қа бөлеміз} \right| =$$

$$= \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} .$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

$x = 2\,arctgt$ болғандықтан, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Нәтижесінде:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 1.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C .$$

Көрсетілген әдіс интеграл астындағы өрнек $\sin x$ және $\cos x$ айнымалыларын ұстайтын кез келген функция үшін қолданылмайды, себебі кей жағдайларда бұл белгілеу өте үлкен өрнектерге әкеп соғуы мүмкін. Онда біз мынадай белгілеуді қолданамыз.

1^0. Егер интеграл астындағы функция косинус бойынша тақ болса, яғни, $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x)\cdot\cos x ,$$

одан кейін интегралда $\sin x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\sin x)\cos x dx = |\sin x = t| = \int R_1(t)dt .$$

Мысал 2.

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cdot coxdx = \int (1-\sin^2 x)\cos xdx = \int (1-\sin^2 x)d\sin x =$$

$$= \left|\sin x = t\right| = \int (1-t^2)dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

2^0. Егер интеграл астындағы функция синус бойынша тақ болса, яғни,

$$R(-\sin x, \cos t) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$ болса,

онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x)\sin x,$$

одан кейін интегралда $\cos x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\cos x)\sin xdx = \left|\cos x = t\right| = -\int R_1(t)dt.$$

3^0. Егер интеграл астындағы функция

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

теңдігін қанағаттандырса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx),$$

одан кейін интегралда айнымалыны ауыстырсақ:

$$tgx = t, \; x = arctgt, \; dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

Онда рационал функцияның интегралына әкеледі.

Мысал 3.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \int tg^3 xdx = \left|tgx = t, dx = \frac{1}{1+t^2}dt\right| = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2 t}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}dt^2 = \left|t^2 = z\right| = \frac{1}{2}\int \frac{(z+1)-1}{z+1}dz = \frac{1}{2}\left(\int dz - \int \frac{dz}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(z - ln\left|z+1\right|) + C =$$

$$= \left|z = t^2 = tg^2 x\right| = \frac{1}{2}(tg^2 x - ln(tg^2 x + 1)) + C.$$

4^0. Мына түрдегі интегралдар:

$\int \sin mx \cos nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \sin nxdx$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, берілсе, онда интеграл астындағы функция мына формулалардың көмегімен синус пен косинустардың қосындысына келеді:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Мысал 4.

$$\int \sin 3x \sin 5xdx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2xdx - \frac{1}{2}\int \cos 8xdx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$$

5^0. $\int \sin^m x \cos^n xdx$ түріндегі интеграл, мұндағы m және n – кез келген бүтін көрсеткіштер.

1). Егер тым болмағанда m немесе n көрсеткіштерінің біреуі тақ бүтін оң сан болса, мысалы $n = 2k+1$, онда $\sin x = t$ деп белгілейміз:

$$\int \sin^m x \bullet \cos^n xdx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos xdx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k d \sin x = \int t^m (1-t^2)^k dt \ .$$

Мысал 5.

$$\int \sin^2 x \cos^3 xdx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)d \sin x = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C\ .$$

2) Егер m және n көрсеткіштерінің екеуі де жұп, оң, бүтін сан болса, онда мына формулаларды қолданған жөн:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ .$$

Мысал 6.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 xdx = \int \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{4}dx = \int \frac{(1-\cos^2 2x)}{4}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C\ .$$

Кейбір иррационал өрнектерді интегралдау.

Рационал емес функциялардың интегралдарын айнымалыны ауыстыру арқылы рационал функцияларға келтіруге болатын жағдайларды қарастырамыз.

1 жағдай. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ есепте, мұндағы a,b,c,d – тұрақты сандар, m- натурал сан, ad-bc≠0, R(x,y)- рационал функция.

$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ белгілеуі интеграл астындағы өрнекті рационал функцияға әкелетіндігін көрсетеміз. Шынында да, $x = \frac{b-dt^m}{ct^m - a}$, $dx = \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt$ болғандықтан,

$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt = \int R_1(t)dt$, мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 7. $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ интегралын есепте.

Мынадай белгілеу енгіземіз: $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$, $x-1 = \frac{2}{t^3-1}$,

нәтижесінде:

$$\int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\cdot\frac{(t^3-1)^2}{4}dt = -\frac{3}{2}\int t^3dt = -\frac{3}{8}t^4 + C = -\frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C\ .$$

Бұл түрдегі интегралдарға $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...)dx$ интегралы да жатады, $x = t^k$ белгілеуінің арқасында интеграл астындағы өрнек рационал функцияға келеді, мұндағы k – барлық x бөлшек көрсеткіштерінің ортақ бөлімі.

Мысал 8. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ тап. Мынадай белгілеу енгізсек: $x = t^4,\ dx = 4t^3dt$,

$$\int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int (1+\frac{t-1}{t^2+1})dt = 4(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}) = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4arctgt + C.$$

x айнымалысына қайта оралсақ, ізделінді интегралдың жауабына келеміз:

$$4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

2 жағдай. Мына түрдегі интеграл астындағы иррационал функцияны тригонометриялық ауыстыруларды қолданып, рационал функцияның интегралына әкелеміз:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx,\quad x = a\sin t;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx,\quad x = atgt;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx,\quad x = a\sec t.$$

Мысал 9.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx = \left| x = 2\sin t,\ dx = 2\cos tdt \right| = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos tdt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int ctg^4 tdctgt = -\frac{1}{20}ctg^5 t + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

3 жағдай. Интеграл $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралын шешу үшін $x - \alpha = \frac{1}{t}$ белгілеуін енгіземіз.

Мысал 10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ тап.

Мына белгілеулерді енгізсек $x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{x^2-2x-1} = \frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$, онда

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер.

I. Берілген анықталмаған интегралдарды есепте.

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. $\left(Жауабы: \frac{1}{4}ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right| + C \right)$.

2. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. $\left(Жауабы: \frac{1}{\sqrt{15}}arctg\frac{\sqrt{3}tgx}{\sqrt{5}} + C \right)$.

3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. $\left(Жауабы: ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right| + C \right)$.

4. $\int \cos^3 x \sin^{10} x\,dx$ $\left(Жауабы\ : \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C \right).$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x}.$ $\left(Жауабы\ : \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| \frac{2tg\frac{x}{2} + 3 - \sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2} + 3 + \sqrt{5}} \right| + C \right).$

6. $\int \sin^4 x\,dx.$ $\left(Жауабы\ : \frac{3x}{8} - \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{96} + C \right).$

7. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx.$ $\left(Жауабы\ : \frac{1}{4} \ln\left| \frac{1 + tgx}{1 - tgx} \right| + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \right).$

8. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$ $\left(Жауабы\ : \ln|tgx| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C \right).$

II. Анықталмаған интералдарды тап.

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx;$ б) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2 + 2}}.$

$\left(Жауабы\ : а)\ \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3} + 1)\right) + C;\quad б)\ \frac{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 + 2}}{3} + C \right).$

2. а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx;$ б) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}.$

$\left(Жауабы\ : а)\ \frac{2}{9}\sqrt[4]{x^9} - \frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + C;\quad б)\ 3\sqrt[3]{x+1} - 4(x+1) + C \right).$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$ б) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4}.$

$\left(Жауабы\ : а)\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x}) \right) + C;\ б)\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-8)^4} + \frac{8}{9}(3x - 8) + C \right).$

III. Анықталмаған интералдарды тап.

.

1. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$ б) $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}.$

$\left(Жауабы\ : а)\ \frac{3}{5}\cos^{5/3} x - 3\cos^{-1/3} x + C;\ б)\ \frac{1}{3}\ln\left| \frac{tg\frac{x}{2} - 2}{2tg\frac{x}{2} - 1} \right| + C \right).$

2. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3 + 4\sin 2x}} dx.$ б) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x + 1}.$

$\left(Жауабы\ : а)\ \frac{1}{4}\sqrt{3 + 4\sin 2x} + C;\quad б)\ \frac{2}{1 + tg\frac{x}{2}} + x + C \right).$

3. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{(3+2\cos 3x)^2}}dx$. б) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$.

$\left(Жауабы: a)\ \frac{1}{2}\sqrt{3+2\cos 3x}+C;\quad б)\ \sqrt{2}\,arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)-x+C \right)$.

Сұрақтар:

1. Қарапайым бөлшектерді интегралдау.

2. Рационал функцияларды интегралдау.
3. Тригонометриялық функцияларды интегралдау.
4.Кейбір алгебралық иррационал функцияларды интегралдау.